BEBERAPA KELAS GRAPH PLANAR SUPER SISI AJAIB

Halimah
Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya,
e-mail : nur26halimah@gmail.com

Prof. I Ketut Budayasa, Ph.D.
Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya,
e-mail : ketutbudayasa@yahoo.com

Abstrak

Pelabelan sisi ajaib pada graph $G(V, E)$ dengan banyak titik p dan banyak sisi q adalah fungsi bijektif $f: V \cup E \rightarrow \{1,2, \dots , p+q\}$ dan untuk setiap $(u, v) \in E(G)$ berlaku $f(u) + f(u, v) + f(v) = s$, dengan v merupakan titik yang terhubung langsung dengan titik u, dan s merupakan konstanta ajaib pada graph G. Selanjutnya graph $G(p, q)$ disebut graph ajaib sisi jika terdapat pelabelan sisi ajaib pada graph tersebut. Suatu graph sisi ajaib dikatakan super sisi ajaib jika terdapat fungsi bijektif $f: (V(G)) \rightarrow \{1,2, \dots , p\}$. Tugas akhir ini akan membahas mengenai beberapa kelas graph planar super sisi ajaib, yang diantaranya ialah graph $P_{2n}(+)N_m$, graph $(P_2 \cup kK_1) + N_2$, graph payung, graph kelabang, graph cumi-cumi, graph triangular belt, dan graph gabungan triangular belt.

Kata Kunci :fungsi bijektif, bilangan konsekutif, blok, total sisi ajaib, super sisi ajaib, dan graph planar.

Abstract

Let a edge magic labeling graph $G(V, E)$ with p vertices and q edges, is bijection function $f: V \cup E \rightarrow \{1,2, \dots , p+q\}$, $(u, v) \in E(G)$ there is $f(u) + f(u, v) + f(v) = s$, v is vertex that adjacent with u, then s is called a magic constant in G. Graph $G(p, q)$ is called graph edge magic if there is edge magic labeling in .A graph is said super edge magic if there is a $f: (V(G)) \rightarrow \{1,2, \dots , p\}$ bijection. In this task, will research about some class of planar graphs super edge-magic, there are $P_{2n}(+)N_m$ graph, $(P_2 \cup kK_1) + N_2$ graph, umbrella graph, braid graph, jellyfish graph, triangular belt graph, and amalgamate of triangular belt graph.

Keyword **:**bijective function, consecutive integer, block, edge magic total, super edge magic, and planar graph.

1. PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Teori graph sebagai salah satu cabang matematika sebenarnya sudah ada sejak lebih dari dua ratus tahun yang silam. Jurnal pertama tentang teori graph muncul pada tahun 1736, oleh matematikawan terkenal Swiss bernama euler. Dari segi matematika, pada awalnya teori graph "kurang" signifikan, karena kebanyakan dipakai untuk memecahkan teka-teki, namun akhirnya mengalami perkembangan yang sangat pesat yaitu terjadi pada beberapa puluh tahun terakhir ini (Budayasa, 2002:2).

Sebuah graph G berisikan dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong V(G) dari obyek-obyek yang disebut titik dan himpunan berhingga (mungkin kosong) E(G) yang elemen-elemenya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen e dalam E(G) merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik di V(G). Ada beberapa macam graph yang telah ditemukan, di antaranya adalah graph planar. Graph G adalah graph planar jika G dapat digambar pada bidang datar sedemikian hingga sisi-sisinya tidak ada yang saling "berpotongan" kecuali mungkin pada titik-titik dari sisi-sisi tersebut (Budayasa, 2002: 2).

Model-model yang ada dalam teori graph berguna untuk aplikasi yang luas, misalnya menentukan lintasan terpendek dari suatu kota ke kota lain yang terdiri dari kumpulan kota dalam suatu daerah. Sehingga muncul pelabelan graph yang merupakan salah satu topik dari teori graph yang mendapat perhatian khusus pada saat ini. Pelabelan graph ini sudah banyak dikaji mulai tahun 1960-an. Studi dari pemberian label pada graph telah memfokuskan pada penemuan graph-graph tertentu yang memiliki pelabelan tertentu, sehingga ada banyak jenis-jenis pelabelan, di antaranya adalah pelabelan simpul, pelabelan sisi, pelabelan total, dan pelabelan ajaib, dimana pada pelabelan ajaib terdapat dua jenis, yaitu pelabelan total sisi ajaib dan pelabelan super sisi ajaib.

(p,q) graph G dengan p titik dan q sisi disebut total sisi ajaib jika ada fungsi bijektif $f: V \cup E \rightarrow \{1,2, \dots, p +$

q} sehingga ada konstanta s untuk sebarang (u,v) di E kita dapatkan $f(u) + f(u, v) + f(v) = s$. Sedangkan Super sisi ajaib adalah total sisi ajaib pada graph G sehingga V(G) dipetakan ke himpunan {1, 2, ..., p}, selebihnya dari $\{(p + 1), (p + 2), \dots, (p + q)\}$ adalah himpunan label sisi. Hal yang menarik dari graph planar adalah selain dapat dikenai pelabelan total sisi ajaib, graph ini juga dapat dikenai pelabelan super sisi ajaib. Sehingga dapat diketahui bahwa ada beberapa kelas graph planar super sisi ajaib.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana menunjukan beberapa kelas graph planar super sisi ajaib?

C. Tujuan Penulisan

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan penelitian dalam penulisan ini adalah untuk menunjukan bahwa ada beberapa kelas graph planar super sisi ajaib.

D. Manfaat Penulisan

Penulis berharap agar tulisan ini bermanfaat untuk:
1. Penulis, sebagai sarana dan latihan untuk menambah pemahaman dan penguasaan tentang materi yang diambil dalam penulisan ini.
2. Pembaca, sebagai bahan kajian bagi yang sedang menempuh mata kuliah yang berhubungan dengan materi ini.

E. Sistematika Penelitian

Penelitian ini mempunyai sistematika penulisan sebagai berikut :

BAB I :Berisikan latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penelitian

BAB II :Berisikan kajian teori yang terdiri dari definisi-definisi dan teorema-teorema yang terkait dengan bagaimana menunjukan beberapa kelas graph planar super sisi ajaib.

BAB III :Berisikan pembahasan dari penelitian yaitu tentang adanya beberapa kelas graph planar super sisi ajaib.

BAB IV :Berisikan simpulan dan saran.

2. LANDASAN TEORI

A. Graph

Definisi 2.1.1

Sebuah graph G berisikan dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong V(G) dari obyek-obyek yang disebut titik dan himpunan berhingga (mungkin kosong) E(G) yang elemen-elemenya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen e dalam E(G) merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik di V(G). Himpunan V(G) disebut himpunan titik G, dan himpunan E(G) disebut himpunan sisi G (Budayasa, 2002: 2).

Definisi 2.1.2

Sisi e = (u, v) dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika e = (u, v) adalah sisi di graph G, maka u dan v disebut terhubung langsung, u dan e serta v dan e disebut terkait langsung. Untuk selanjutnya, sisi e = (u,v) akan ditulis e = uv. (Budayasa, 2002:2).

Definisi 2.1.3

Sebuah graph G dikatakan terhubung jika untuk setiap dua titik G yang berbeda terdapat sebuah lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut.

Definisi 2.1.4

Titik pemutus graph adalah titik pada graph yang jika dihilangkan maka banyak komponen dari graph tersebut akan bertambah.

Definisi 2.1.5

Komponen graph G adalah subgraph terhubung dari graph G yang bukan merupakan subgraph dari sebarang subgraph terhubung dari graph G.

Definisi 2.1.6

Graph H disebut subgraph dari G jika himpunan titik di H adalah subset dari himpunan titik-titik di G dan himpunan sisi-sisi di H adalah subset dari himpunan sisi di G. Dapat ditulis V(H) ⊂ V(G) dan E(H) ⊂ E(G). Jika H adalah subgraph G, maka dapat ditulis H ⊂ G (Budayasa, 2002:2).

Definisi 2.1.7

Derajat suatu titik v pada sebuah graph G, ditulis dengan deg(v), adalah banyak sisi G yang terkait dengan titik v (dengan catatan setiap gelung dihitung dua kali).

Terorema 2.1.8

Jika G graph $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, maka $\sum_{i=1}^{p} \deg_G(v_i) = 2q$.

Bukti:

Setiap sisi adalah terkait langsung dengan 2 titik jika setiap derajat titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali.

Corollary 2.1.9

Pada sebarang graph, jumlah derajat titik ganjil adalah genap.

Bukti:

Misalkan graph G dengan ukuran q. Maka ambil W yang memuat himpunan titik ganjil di G serta U yang memuat himpunan titik genap di G.

Dari teorema diatas maka diperoleh:

$$\sum_{v \in v(G)} \mathbf{deg_G\ v} = \sum_{v \in W} \mathbf{deg_G\ v} = \sum_{v \in U} \mathbf{deg_G\ v} = \mathbf{2q}$$

Dengan demikian karena $\sum_{v \in U} \mathbf{deg_G\ v}$ adalah genap maka $\sum_{v \in W} \mathbf{deg_G\ v}$ juga genap. Sehingga |W| adalah genap.

Definisi 2.1.10

Sebuah jalan(*walk*) u – v di graph G adalah barisan berhingga(tak kosong). W : u = v_o , e_1, v_1 , e_2 , v_2 , ..., e_n, v_n = v yang suku-sukunya berselang-seling antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik sedemikian hingga untuk $0 \leq i \leq n$. Dengan $e_1 = v_{i-1}v_i$ adalah sisi di G. v_o disebut titik awal, v_n disebut titik akhir v_1, v_2, ..., v_{n-1} disebut titik interval, dan n menyatakan panjang dari W.

Definisi 2.1.11
Jalan u – v yang semua sisinya berbeda disebut Trail u – v.

Definisi 2.1.12
Jalan u – v yang semua titiknya berbeda disebut lintasan (*path*) u – v.

Definisi 2.1.13
Misalkan u dan v titik berbeda pada graph G. Maka titik u dan v dapat dikatakan terhubung, jika terdapat lintasan u – v di G. Sedangkan suatu graph G dapat dikatakan terhubung, jika untuk setiap titik u dan v di G terhubung.

Definisi 2.1.14
Graph sederhana adalah graph yang tidak memiliki sisi rangkap dan tidak memiliki gelung.

Definisi 2.1.15
Graph G disebut graph planar jika G dapat di gambar pada bidang datar sedemikian hingga sisi-sisinya tidak ada yang saling "berpotongan" kecuali mungkin pada titik-titik ujung.

B. Fungsi

Definisi 2.2.1
Suatu fungsi f dari x ke y ialah suatu aturan yang pada setiap anggota dari x berpasangan dengan tunggal satu anggota dari y.

Definisi 2.2.2
Suatu fungsi f : A → B dikatakan Surjektif, jika untuk setiap unsur $y \in B$ terdapat $x \in A$ sedemikian hingga $f(x) = y$.

Definisi 2.2.3
Suatu fungsi f : A → B dikatakan injektif, jika untuk setiap unsur x_1 dan x_2 di A yang dipetakan sama oleh f yaitu $f(x_1) = f(x_2)$ berlaku, $x_1 = x_2$.

Definisi 2.2.4
Suatu fungsi f : A → B dikatakan bijektif jika memenuhi injektif dan surjekjtif.

C. Total Sisi Ajaib

Definisi 2.3.1
(p,q) - graph G dengan p titik dan q sisi disebut total sisi ajaib jika ada fungsi bijektif $f: V \cup E \rightarrow \{1,2,\ldots,p+q\}$ sehingga ada konstanta s untuk sebarang (u,v) di E kita dapatkan $f(u) + f(u,v) + f(v) = s$.

D. Super Sisi Ajaib

Definisi 2.4.1
(p,q) - graph G dengan p titik dan q sisi disebut super sisi ajaib jika memenuhi total sisi ajaib pada graph G sehingga V(G) dipetakan ke himpunan {1, 2, ..., p}, selebihnya dari $\{(p+1),(p+2),\ldots,(p+q)\}$ adalah himpunan label sisi.

Definisi 2.4.2
Bilangan konsekutif adalah bilangan arimetik yang bedanya sama dengan satu. Sebuah himpunan bagian S dari bilangan bulat disebut konsekutif jika S terdiri dari bilangan bulat konsekutif.

Definisi 2.4.3
Graph G adalah super sisi ajaib jika ada pelabelan titik f sedemikian hingga dua himpunan $f(V(G))$ dan $\{f(u)+f(v): (u,v) \in E(G)$ adalah himpunan bilangan berurutan.

Definisi 2.4.4
Graph G adalah super sisi ajaib jika dan hanya jika terdapat sebuah fungsi bijektif $f: V(G) \rightarrow \{1,2,\ldots,p\}$ sedemikian hingga himpunan $S = \{f(u)+f(v): uv \in E(G)\}$ yang terdiri dari bilangan bulat berurutan q. Pada suatu kasus, f diperluas ke pelabelan super sisi ajaib G dengan derajat titik $k = p + q + s$ dimana $s = \min(S)$ dan $S = \{f(u)+f(v): uv \in E(G)\}$.

E. Blok

Definisi 2.5.1
Bondy-Murty menyatakan bahwa Blok adalah suatu graph G terhubung maksimal yang tidak memiliki titik pemutus.

3. PEMBAHASAN

Kita awali dengan sebuah graph planar yang dibentuk dari sebuah lintasan 2n titik, P_{2n} dan sejumlah m titik saling asing N_m , seperti yang tertuang dalam definisi berikut.

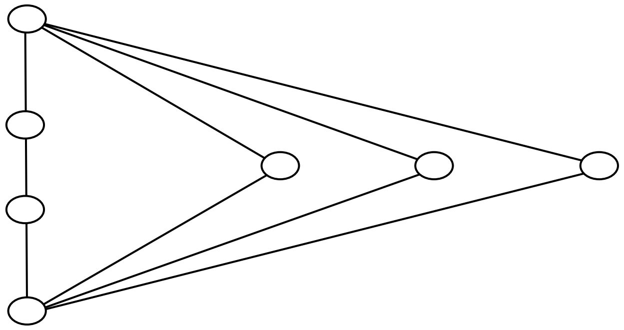
Definisi 3.1
Misalkan P_{2n} adalah graph lintasan 2n titik dengan,
$V(P_{2n}) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{2n}\}$ dan
$E(P_{2n}) = \{v_i, v_{i+1}: 1 \leq i \leq 2n-1\}$
Misalkan N_m adalah graph kosong m titik dengan,
$V(N_m) = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$, dan
$E(N_m) = \{(v_1,y_1),(v_1,y_2),\ldots,(v_1,y_m),(v_{2n},y_1),$
$(v_{2n},y_2),\ldots,(v_{2n},y_m)\}$.
Selanjutnya definisi graph $P_{2n}(+)N_m$ sebagai berikut :
$V(P_{2n}(+)N_m) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{2n}, y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ dan,
$E(P_{2n}(+)N_m) =$
$\{v_i, v_{i+1}: 1 \leq i \leq 2n-1\}$
$\cup \{(v_1,y_1),(v_1,y_2),\ldots,(v_1,y_m),(v_{2n},y_1),$

$(v_{2n}, y_2), \dots, (v_{2n}, y_m)\}$.
Sehingga jelas bahwa
$|V(P_{2n}(+)N_m)| = p = 2n + m$, dan
$|E(P_{2n}(+)N_m)| = q = 2(m + n) - 1$.

Selanjutnya, kita buktikan graph $P_{2n}(+)N_m$ adalah super sisi ajaib.

Teorema 3.1
Graph $P_{2n}(+)N_m$ adalah super sisi ajaib untuk semua $n, m \geq 1$.
Bukti
Definisikan $f: V(P_{2n}(+)N_m) \to \{1,2,\dots,2(m+n)-1\}$, dengan :
$f(v_{1+2t}) = 1 + t, t = 0,1,\dots,n-1$
$f(v_{2+2t}) = m + n + 1 + t, t = 0,1,\dots,n-1$
$f(y_k) = k + n, k = 1,2,\dots,m$
Tahap 1 :
Akan ditunjukan bahwa:
$f\big(V(P_{2n}(+)N_m)\big)$ dan $\{f(u) + f(v) : (u,v) \in E(P_{2n}(+)N_m)\}$adalah impunan berurutan.
Perhatikan bahwa :
a) $f\big(V(P_{2n}(+)N_m)\big)$ adalah himpunan berurutan dimana
$f\big(V(P_{2n}(+)N_m)\big) = \left\{\begin{matrix} 1,2,3,\dots,n,n+1,n+2,\dots,n+m,n+m+1, \\ n+m+2,\dots,2n+m \end{matrix}\right\}$
b) $\{f(u) + f(v) : (u,v) \in E(P_{2n}(+)N_m)\}$ adalah himpunan berurutan, dimana $\{f(u) + f(v) : (u,v) \in E(P_{2n}(+)N_m)\} = \{n+2, n+3, \dots, n+m+1, n+m+2, n+m+3, \dots, 3n+m, 3n+m+1, 3n+m+2, \dots, 3n+2m\}$
Dengan demikian $f\big(V(P_{2n}(+)N_m)\big)$ dan $\{f(u) + f(v) : (u,v) \in E(P_{2n}(+)N_m)\}$ adalah himpunan berurutan.
Tahap 2 :
Akan ditunjukan bahwa Graph $(P_{2n}(+)N_m)$ adalah super sisi ajaib.
Perhatikan bahwa :
$f(uv) = p + q + s - \big(f(u) + f(v)\big)$
$\{f(uv) \in (P_{2n}(+)N_m)\} =$
$\{1,2,3,\dots,n,n+1,n+2,\dots,n+m,n+m+1,n+m+2,\dots,2n+m,2n+m+1,2n+m+2,\dots,2n+2m,2n+2m+1\dots,4n+2m-2,4n+2m-1,4n+2m,4n+2m+1,\dots,4n+3m-1\}$ adalah himpunan berurutan.
Sehingga menurut definisi 2.4.1, 2.4.3, dan 2.4.4 maka graph $P_{2n}(+)N_m$ adalah super sisi ajaib.

Contoh 3.1



Gambar: Graph $P_4(+)N_3$

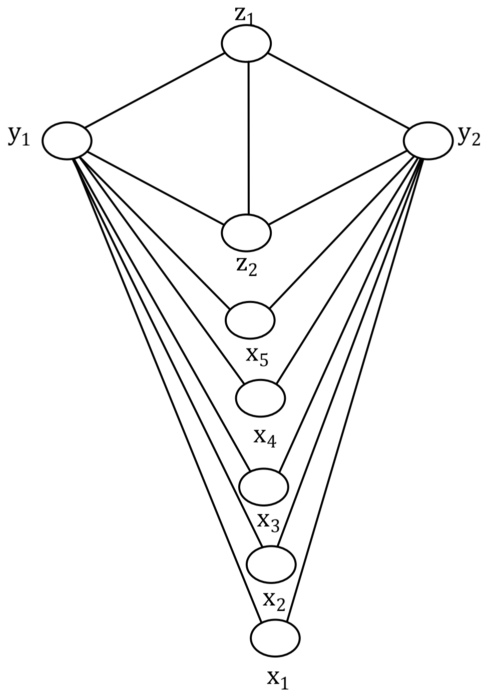
Selanjutnya, kita bicarakan graph planar yang dibangun oleh graph-graph P_2, K_1, dan N_2, seperti yang tertuang dalam definisi berikut.

Definisi 3.2
Misalkan P_2 adalah graph lintasan 2 titik dengan,
$V(P_2) = \{z_1, z_2\}$ dan $E(P_2) = \{(z_1, z_2)\}$
Misalkan N_2 adalah graph kosong 2 titik dengan,
$V(N_2) = \{y_1, y_2\}$, dan
$E(N_2) = \{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_2, z_2)\}$
Misalkan kK_1 adalah duplikat graph komplit 1 titik sebanyak k dengan,
$V(kK_1) = \{x_1, \dots, x_k\}$, dan
$E(kK_1) = \{(x_i, y_2), (x_i, y_1) : 1 \leq i \leq k\}$.
Selanjutnya definisi graph $(P_2 \cup kK_1) + N_2$ sebagai berikut :
$V\big((P_2 \cup kK_1) + N_2\big) = \{z_1, z_2, x_1, \dots, x_k, y_1, y_2\}$, dan
$E\big((P_2 \cup kK_1) + N_2\big) =$
$\{(z_1, z_2)\} \cup \{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_2, z_2)\} \cup \{(x_i, y_2), (x_i, y_1) : 1 \leq i \leq k\}$. Jelas bahwa
$\big|V\big((P_2 \cup kK_1) + N_2\big)\big| = p = k + 4$, dan
$\big|E\big((P_2 \cup kK_1) + N_2\big)\big| = q = k + 8$.

Selanjutnya, kita buktikan graph $(P_2 \cup kK_1) + N_2$ adalah super sisi ajaib.
Teorema 3.2
Untuk $k \geq 1$, graph planar $(P_2 \cup kK_1) + N_2$ adalah super sisi ajaib.
Bukti :
Didefinisikan $f: V\big((P_2 \cup kK_1) + N_2\big) \to \{1,2,\dots,k+4\}$ dengan :
$f(y_1) = 1, f(y_2) = k + 4$,
$f(z_1) = 2, f(z_2) = k + 3$ dan
$f(x_s) = s + 2$ untuk $s = 1,2,\dots,k$.
Tahap 1 :
Akan ditunjukan bahwa $f\Big(V\big((P_2 \cup kK_1) + N_2\big)\Big)$ dan $\Big\{f(u) + f(v) : (u,v) \in E\big((P_2 \cup kK_1) + N_2\big)\Big\}$ adalah himpunan berurutan.
Perhatikan bahwa :
a) $f\Big(V\big((P_2 \cup kK_1) + N_2\big)\Big)$ adalah himpunan berurutan, dimana
$\Big(V\big((P_2 \cup kK_1) + N_2\big)\Big) = \{1,2,3,4,\dots,k+2,k+3,k+4\}$
b) $\Big\{f(u) + f(v) : (u,v) \in E\big((P_2 \cup kK_1) + N_2\big)\Big\}$ adalah himpunan berurutan, diamana $\{f(u) + f(v) : (u,v) \in E\big((P_2 \cup kK_1) + N_2\big)\} = \{3,4,5,\dots k+3, k+4, k+5, k+6, k+7, k+8\dots,2k+6, 2k+7\}$
Dengan demikian $f\Big(V\big((P_2 \cup kK_1) + N_2\big)\Big)$ dan $\Big\{f(u) + f(v) : (u,v) \in E\big((P_2 \cup kK_1) + N_2\big)\Big\}$ adalah himpunan berurutan.
Tahap 2 :
Akan ditunjukan bahwa graph $\big((P_2 \cup kK_1) + N_2\big)$ adalah super sisi ajaib.
Perhatikan bahwa :
$f(uv) = p + q + s - \big(f(u) + f(v)\big)$, dimana

$\{f(uv) \in ((P_2 \cup kK_1) + N_2)\} = \{1,2,3,4, \ldots ,8,9, k + 2, k + 3, k + 4, \ldots , k + 7, k, k + 8, k + 9, k + 10, k + 11, k + 12, \ldots ,2k + 10,2k + 11,2k + 12\}$ adalah himpunan berurutan. Sehingga menurut definisi 2.4.1, 2.4.3, dan 2.4.4 maka graph $((P_2 \cup kK_1) + N_2)$ adalah super sisi ajaib.

Contoh 3.2



Gambar: Graph $(P_2 \cup 5K_1) + N_2$

Salah satu kelas graph planar yang lain adalah graph "payung" yang didefinisikan seperti berikut:

Definisi 3.3

Graph $U(m,n) = (V(U(m,n)), E(U(m,n)))$, dimana
$V(U(m,n)) = \{x_1, x_2, \ldots , x_m, y_1, y_2, \ldots , y_n\}$, dan
$E(U(m,n)) = \{(x_i, x_{i+1}) : 1 \leq i \leq m - 1\}$
$\cup \{(y_i, y_{i+1}) : 1 \leq i \leq n - 1\}$
$\cup \{(x_i, y_1) : 1 \leq i \leq m\}$. Sehingga jelas bahwa
$|V(U(m,n)| = p = m + n$, dan
$E(U(m,n)) = q = 2m + n - 2$.

Selanjutnya, kita buktikan graph $U(m,n)$ adalah super sisi ajaib.

Teorema 3.3

Untuk sebarang bilangan bulat $m > 2$ dan $n > 1$, graph payung U(m,n) adalah super sisi ajaib.

Bukti :

Definisikan f: $V(U(m,n)) \to \{1,2, \ldots , m + n\}$, dengan :
$f(x_{1+2s}) = s + 1$ untuk $s = 0,1, \ldots , \lfloor m/2 \rfloor - 1$.
$f(x_{2+2s}) = \lfloor m/2 \rfloor + s + 1$, untuk $s = 0,1, \ldots , \lfloor m/2 \rfloor - 1$
$f(y_{1+2s}) = m + \lfloor n/2 \rfloor + 1 + t$, untuk $t = 0,1, \ldots , \lfloor n/2 \rfloor - 1$
$f(y_{2+2s}) = m + 1 + t$, untuk $t = 0,1, \ldots , \lfloor n/2 \rfloor - 1$

Tahap 1 :

Akan ditunjukan bahwa $f(V(U(m,n)))$ dan $\{f(u) + f(v) : (u,v) \in E(U(m,n))\}$ adalah himpunan berurutan.

Perhatikan bahwa :

a) $f(V(U(m,n)))$ adalah himpunan berurutan, dimana
$\{1,2, \ldots , \lfloor m/2 \rfloor, \lfloor m/2 \rfloor + 1, \lfloor m/2 \rfloor + 2, \ldots , m, m + 1, m + 2, \ldots , m + \lfloor n/2 \rfloor, m + \lfloor n/2 \rfloor + 1, m + \lfloor n/2 \rfloor + 2, \ldots , m + n\}$

b) $\{f(u) + f(v) : (u,v) \in E(U(m,n))\}$ adalah himpunan berurutan, diamana
$\{f(u) + f(v) : (u,v) \in E(U(m,n))\} = \{\lfloor m/2 \rfloor + 2, \lfloor m/2 \rfloor + 3, \ldots , \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + m, m + \lfloor n/2 \rfloor + 2, m + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2, \ldots ,2m + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, 2m + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2,2m + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3, \ldots ,2m + n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\}$.

Dengan demikian $f(V(P_{2n}(+)N_m))$ dan $\{f(u) + f(v) : (u,v) \in E(U(m,n))\}$ adalah himpunan berurutan.

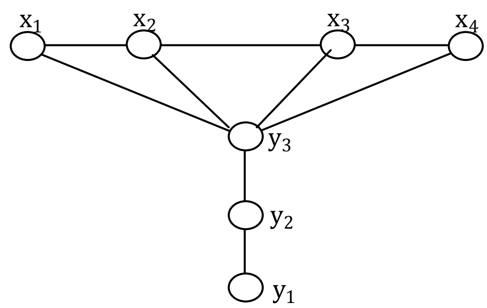
Tahap 2 :

Akan ditunjukan bahwa Graph $(U(m,n))$ adalah super sisi ajaib.

Perhatikan bahwa :

$f(uv) = p + q + s - (f(u) + f(v))$, dimana
$\{f(uv) \in (U(m,n))\} = \{1,2, \ldots , \lfloor m/2 \rfloor, \lfloor m/2 \rfloor + 1, \lfloor m/2 \rfloor + 2, \ldots , m, m + 1, m + 2, \ldots , m + \lfloor n/2 \rfloor, m + \lfloor n/2 \rfloor + 1, m + \lfloor n/2 \rfloor + 2, \ldots , m + n, \left(m + 2n + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right), \ldots , \left(m + 2n + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 3\right), \left(m + 2n + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2\right), \left(m + 2n + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right) \ldots , \left(2m + 2n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2\right), \left(2m + 2n - 2 + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right), (2m + 2n), \ldots , ((3m + 2n - 3)), ((3m + 2n - 2))\}$
adalah himpunan berurutan. Sehingga menurut definisi 2.4.1, 2.4.3, dan 2.4.4 maka graph $(U(m,n))$ adalah super sisi ajaib.

Contoh 3.3



Gambar: Graph $U(4,3)$

Adapun kelas graph planar yang lain adalah graph "kelabang" yang didefinisikan seperti berikut:

Definisi 3.4

Graph $B(n)$ dengan $n \geq 3$, dan
$V(B(n)) = \{x_1, x_2, \ldots , x_n, y_1, y_2, \ldots , y_n\}$,

$E(B(n)) = \{(x_i, x_{i+1}): 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{(y_i, y_{i+1}): 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{(x_i, y_{i+1}): 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{(y_i, x_{i+2}): 1 \leq i \leq n-2\}$.
Sehingga jelas bahwa
$|V(B(n))| = p = 2n$, dan
$|E(B(n))| = q = 4n - 5$.

Selanjutnya, kita buktikan graph $B(n)$ adalah super sisi ajaib.

Teorema 3.4:
Graph burung $B(n)$ adalah super sisi ajaib untuk semua $n \geq 3$.

Bukti :
Definisikan pelabelan titik f pada $B(n)$ sebagai berikut:
$f(x_i) = 2i - 1$
$f(y_i) = 2i$, untuk $i = 1, \dots, n$.

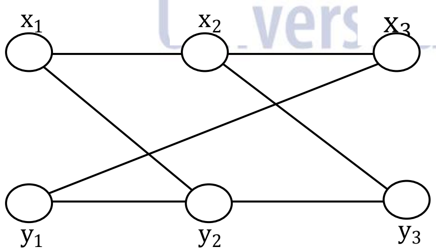
Tahap 1 :
Akan ditunjukan bahwa $f(V(B(n)))$ dan $\{f(u) + f(v): (u,v) \in E(B(n))\}$ adalah himpunan berurutan.
Perhatikan bahwa :

a) $f(V((B(n))))$ adalah himpunan berurutan dimana $f(V(B(n))) = \{1,2,3,4, \dots, 2n-1, 2n\}$
b) $\{f(u) + f(v): (u,v) \in E(P_{2n}(+)N_m)\}$ adalah himpunan berurutan, dimana
$$\{f(u) + f(v): (u,v) \in E(B(n))\} = \{4,5,6,8,9,10, \dots, 4n-4, 4n-3, 4n-2\}$$

Dengan demikian $f(V(B(n)))$ dan $\{f(u) + f(v): (u,v) \in E(B(n))\}$ adalah himpunan berurutan.

Tahap 2 :
Akan ditunjukan bahwa Graph $B(n)$ adalah super sisi ajaib.
Perhatikan bahwa :
$f(uv) = p + q + s - (f(u) + f(v))$, dimana
$\{f(uv) \in (B(n))\} = \{1,2,3,4, \dots, 2n-1, 2n, (2n+1), (2n+2), (2n+3), \dots, (6n-11), (6n-10), (6n-9), \dots, (6n-7), (6n-6), (6n-5)\}\}$ adalah himpunan berurutan. Sehingga menurut definisi 2.4.1, 2.4.3, dan 2.4.4 maka graph $B(n)$ adalah super sisi ajaib.

Contoh 3.4



Gambar: $B(3)$

Kelas graph planar lain adalah graph "cumi-cumi" yang didefinisikan seperti berikut:

Definisi 3.5
Graph $J(m,n)$ dengan
$V(J(m,n)) = \{u, v, x, y\} \cup \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \cup \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, dan
$E(J(m,n)) = \{(u,x), (u,v), (u,y), (v,x), (v,y)\} \cup \{(x_i, x): 1 \leq i \leq m\} \cup \{(y_i, y): 1 \leq i \leq n\}$. Jelas bahwa
$|V(J(m,n))| = p = 2n + m$, dan
$|E(J(m,n))| = q = 2(m+n) - 1$.

Selanjutnya, kita buktikan graph $J(m,n)$ adalah super sisi ajaib.

Teorema 3.5
Graph cumi-cumi J(m,n) adalah super sisi ajaib untuk semua $m, n \geq 0$.

Bukti :
Definisikan $f: V(J(m,n)) \to \{1,2, \dots, m+n+4\}$ dengan :
$f(x_i) = i$, untuk $1 \leq i \leq m$
$f(u) = m+1$, $f(x) = m+2$,
$f(y) = m+3$, $f(v) = m+4$,
$f(y_i) = m+4+i$, untuk $1 \leq i \leq n$.

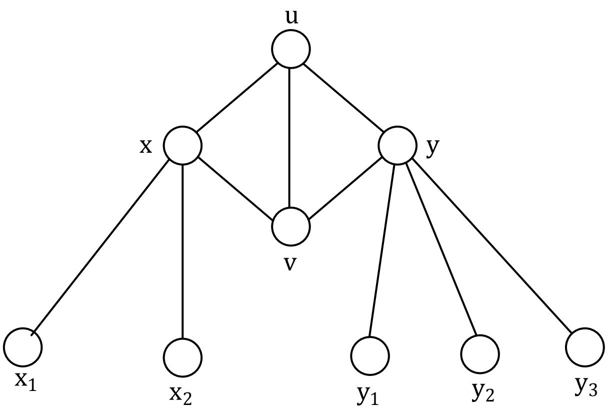
Tahap 1 :
Akan ditunjukan bahwa $f(V(J(m,n)))$ dan $\{f(u) + f(v): (u,v) \in E(J(m,n))\}$ adalah himpunan berurutan.
Perhatikan bahwa :

a) $f(V(J(m,n)))$ adalah himpunan berurutan, dimana $f(V(J(m,n))) = \{1,2, \dots, m, m+1, m+2, m+3, m+4, m+5+m+6, \dots, n+m+4\}$
b) $\{f(u) + f(v): (u,v) \in E(J(m,n))\}$ adalah himpunan berurutan, dimana
$$\{f(u) + f(v): (u,v) \in E(J(m,n))\} = \{n+3, n+4, \dots, 2m+2, 2m+3, 2m+4, 2m+5, 2m+6, 2m+7, 2m+8, 2m+9, \dots, 2m+n+7\}$$

Dengan demikian $f(V(J(m,n)))$ dan $\{f(u) + f(v): (u,v) \in E(J(m,n))\}$ adalah himpunan berurutan.

Tahap 2 :
Akan ditunjukan bahwa Graph $J(m,n)$ adalah super sisi ajaib.
Perhatikan bahwa :
$f(uv) = p + q + s - (f(u) + f(v))$, dimana
$\{f(uv) \in (J(m,n))\} = \{1,2, \dots, m, m+1, m+2, m+3, m+4, m+5+m+6, \dots, n+m+4, m+n+5, \dots, m+2n+3, m+2n+4, m+2n+5, m+2n+6, m+2n+7, m+2n+8, m+2n+9, m+2n+10, \dots, 2m+2n+8, 2m+2n+9\}$ adalah himpunan berurutan. Sehingga menurut definisi 2.4.1, 2.4.3, dan 2.4.4 maka graph $(J(m,n))$ adalah super sisi ajaib.

Contoh 3.5



Gambar: Graph $J(2,3)$

Salah satu kelas graph planar yang lain adalah graph "triangular belt" yang didefinisikan seperti berikut:

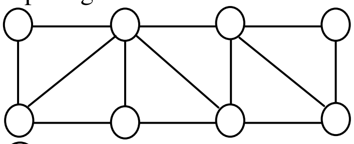
Definisi 3.6

Misalkan $S = \{\uparrow, \downarrow\}$ adalah simbol yang merepresentasikan posisi blok.

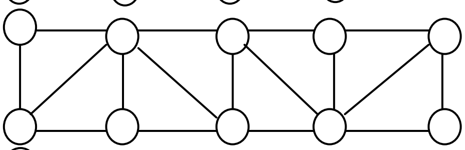
Misalkan α adalah sebuah barisan n simbol dari S.

Kita akan mengkontruksi sebuah graph n blok ubin dari sisi ke sisi yang posisinya diindikasikan dengan α. Kita akan menunjukan hasil graph $TB(\alpha)$ dan merujuk ke triangular belt. Untuk lebih sederhananya kita akan menunjukan bahwa $\uparrow^n = (\uparrow, \uparrow, \uparrow, \ldots \uparrow)$ dan $\downarrow^n = (\downarrow, \downarrow, \ldots, \downarrow)$.

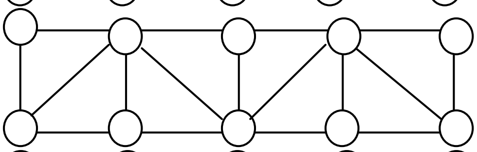
Misalkan $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in S^n$, maka $TB(\alpha) = (\uparrow, \downarrow, \downarrow)$, $TB(\beta) = (\uparrow, \downarrow, \downarrow, \uparrow)$, $TB(\gamma) = (\uparrow, \downarrow, \uparrow, \downarrow)$, $TB(\delta) = (\uparrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow)$, masing-masing akan ditunjukan seperti gambar di bawah ini :



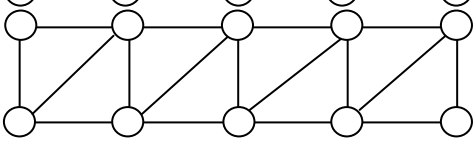
TB$(\uparrow, \downarrow, \downarrow)$



TB$(\uparrow, \downarrow, \downarrow, \uparrow)$



TB$(\uparrow, \downarrow, \uparrow, \downarrow)$



TB$(\uparrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow)$

Selanjutnya, kita buktikan bahwa graph $TB(\alpha)$ adalah super sisi ajaib

Teorema 3.6

Untuk sebarang α di S^n, n >1, triangular belt (α) adalah super sisi ajaib.

Bukti :

Algoritma dibawah ini mengindikasikan sebuah pola pelabelan.

Dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Label titik-titik bagian atas dari belt dengan semua bilangan ganjil $\{1,3,5,\ldots,2n+1\}$dari kiri ke kanan dengan sempurna.
2. Kemudian label titik-titik bagian bawah pada belt dari kiri ke kanan dengan semua bilangan genap $\{2,4,6,\ldots,2n+2\}$.
3. Label sisi-sisi blok dengan menjumlahkan tiap-tiap titik yang saling terhubung

Tahap 1 :

Akan ditunjukan bahwa $f(V(TB(\alpha)))$ dan $\{f(u) + f(v): (u,v) \in E(TB(\alpha))\}$ adalah himpunan berurutan.

Perhatikan bahwa :

a) $f(V(TB(\alpha)))$ adalah himpunan berurutan, dimana $f(V(TB(\alpha)) = \{1,2,3,4,5,6,,\ldots,2n+1,2n+2\}$
b) $\{f(u) + f(v): (u,v) \in E(TB(\alpha)\}$ adalah himpunan berurutan, dimana $\{f(u) + f(v): (u,v) \in E(TB(\alpha)\} = \{3,4,5,6,7,8,9,10,11,\ldots,2n+6,2n+7,2n+8,4n+3\}$.

Dengan demikian $f(V(TB(\alpha)))$ dan $\{f(u) + f(v): (u,v) \in E(TB(\alpha)\}$ adalah himpunan berurutan.

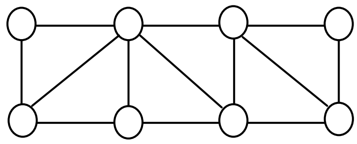
Tahap 2 :

Akan ditunjukan bahwa Graph $TB(\alpha)$ adalah super sisi ajaib.

Perhatikan bahwa :

$f(uv) = p + q + s - (f(u) + f(v))$, dimana $\{f(uv) \in (TB(\alpha)\} = \{1,2,3,4,5,6,,\ldots,2n+1,2n+2,(2n+3),(4n-2),(4n-1),(4n),(6n-5),(6n-4),(6n-3),(6n-2),(6n-1),(6n),(6n+1),(6n+2),(6n+3)\}$ adalah himpunan berurutan. Sehingga menurut definisi 2.4.1, 2.4.3, dan 2.4.4 maka graph $TB(\propto)$ adalah super sisi ajaib.

Contoh 3.6



Gambar :$TB(\alpha)$

Adapula kelas graph planar yang lain adalah graph "gabungan triangular belt" yang didefinisikan seperti berikut:

Definisi 3.7

Algoritma dibawah ini mengindikasikan sebuah pola pelabelan gabungan triangular belt.

Dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Untuk setiap $n > 1, \alpha \in S^n$. Kita ambil triangular belt $\alpha \in S^n$, dan $k > 0, \beta \in S^k$.
2. Eliminasi k dengan eliminasi terakhir bersimbol " $\uparrow$ " dan kita rotasikan TB(β) dengan 90^0 berlawanan arah jarum jam pada blok terakhir $TB(\beta)$.
3. Dan gabungkan hasil rotasi $TB(\beta)$ dengan blok pertama TB(α) . Sehingga menghasilkan $TBL(n,\alpha,k,\beta)$.

V(TBL(n, α, k, β)) =
$x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,n+1}, x_{2,1}, x_{2,2}, \dots, x_{2,n+1}, y_{3,1}, y_{3,2}, \dots, y_{3,k}, y_{4,1}, y_{4,2}, \dots, y_{4,k}$.
Sehingga jelas bahwa
$\left|V\left(\left(TB(\alpha) + \left(TB(\beta)\right) - 2\right)\right)\right| =$
$p = ((2n+2) + (2k+2)) - 2 = 2(n+k+1)$, dan
$\left|E\left(\left(TB(\alpha) + \left(TB(\beta)\right) - 1\right)\right)\right| = q = ((4n+1) + (4k+1)) - 1 = 4(n+k) + 1.$

Selanjutnya, kita buktikan bahwa graph TBL(n, α, k, β) adalah super sisi ajaib

Teorema 3.7
Graph TBL(n, α, k, β) adalah super sisi ajaib untuk semua $\alpha \in S^n$ dan $\beta \in S^n$ dengan blok terakhir $\uparrow$ untuk semua k > 0.

Bukti :
Kita bagi menjadi 2 kasus :

Kasus 1 :
Untuk k = 1. Didefinisikan $f: V\left(TBL(n,\alpha,1,\beta)\right) \to \{1,2,\dots,2n+4\}$, dengan :
$f\left(x_{1,j}\right) = 4 + 2(j-1) = 2j + 2$, untuk $1 \le j \le n+1$
$f\left(x_{2,j}\right) = 3 + 2(j-1) = 2j + 1$, untuk $1 \le j \le n+1$
$f\left(x_{3,1}\right) = 2$ dan $f\left(x_{4,1}\right) = 1$

Tahap 1 :
Akan ditunjukan bahwa $f\left(V(n,\alpha,1,\beta)\right)$ dan $\{f(u) + f(v): (u,v) \in E(n,\alpha,1,\beta)\}$ adalah himpunan berurutan.

a) $f\left(V(n,\alpha,1,\beta)\right)$ adalah himpunan berurutan, dimana
$f\left(V(n,\alpha,1,\beta)\right) = \{1,2,3,4,5,6,2n+3,2n+4\}$
b) $\{f(u) + f(v): (u,v) \in E(n,\alpha,1,\beta)\}$ adalah himpunan berurutan, dimana
$\{f(u) + f(v): (u,v) \in E(n,\alpha,1,\beta)\}$
$= \{3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,,(2n+11),(4n+4),(4n+6),(4n+7)\}$

Dengan demikian $f\left(V(n,\alpha,1,\beta)\right)$ dan $\{f(u) + f(v): (u,v) \in E(n,\alpha,1,\beta)\}$ adalah himpunan berurutan.

Tahap 2:
Akan ditunjukan bahwa Graph $(n,\alpha,1,\beta)$ adalah super sisi ajaib.
Perhatikan bahwa :
$f(uv) = p + q + s - \left(f(u) + f(v)\right)$
$\{f(uv) \in (n,\alpha,1,\beta)\} = \{1,2,3,4,5,6,2n+3,2n+4,2n+5,2n+6,\dots,2n+8,4n+1,\dots,6n-3,6n-1,6n,6n+1,6n+2,\dots,6n+9\}$ adalah himpunan berurutan. Sehingga menurut definisi 2.4.1, 2.43, dan 2.4.4 maka graph $(n,\alpha,1,\beta)$ adalah super sisi ajaib.

Kasus 2 :
untuk k > 1. Didefinisikan
$f: V\left(TBL(n,\alpha,k,\beta)\right) \to \{1,2,\dots,2(n+k+1)\}$, dengan :
$f\left(x_{1,j}\right) = 2k + 2j$, untuk $j = 1,2,\dots,n+1$
$f\left(x_{2,j}\right) = 2k + 2j - 1$, untuk $j = 1,2,\dots,n+1$
$f\left(x_{3,j}\right) = 2j$, untuk $j = 1,2,\dots,k$
$f\left(x_{4,j}\right) = 2j - 1$, untuk $j = 1,2,\dots,k$

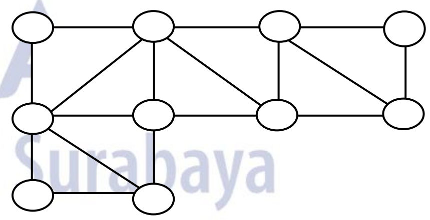
Tahap 1:
Akan ditunjukan bahwa $f\left(V(n,\alpha,k,\beta)\right)$ dan $\{f(u) + f(v): (u,v) \in E(n,\alpha,k,\beta)\}$ adalah himpunan berurutan.

a) $f\left(V(n,\alpha,1,\beta)\right)$ adalah himpunan berurutan, dimana, $f\left(V(n,\alpha,k,\beta)\right) = \{1,2,3,4,2k-1,2k,2k+1,2k+2,2k+3,2k+4,\dots,2k+2n+1,2k+2n+2\}$
b) $\{f(u) + f(v): (u,v) \in E(n,\alpha,1,\beta)\}$ adalah himpunan berurutan, dimana $\{f(u) + f(v): (u,v) \in E(n,\alpha,k,\beta)\} = \{3,4,5,6,7,\dots,(2k+4),(2k+5),(2k+6),(4k+4),(4k+5),(4k+6),(4k+7),(4k+8),(4k+10),\dots,(4k+2n+3),(4k+2n+5),(4k+2n+7),(4k+4n),(4k+4n+3)\}$

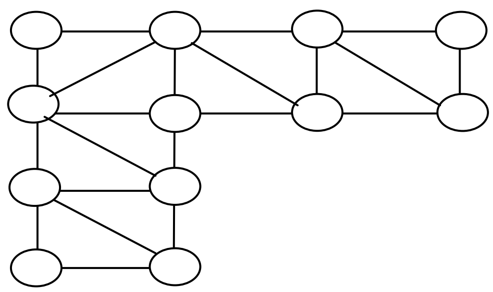
Dengan demikian $f\left(V(n,\alpha,k,\beta)\right)$ dan $\{f(u) + f(v): (u,v) \in E(n,\alpha,k,\beta)\}$ adalah himpunan berurutan.

Tahap 2:
Akan ditunjukan bahwa Graph (n,α,k,β) adalah super sisi ajaib.
Perhatikan bahwa :
$f(uv) = p + q + s - \left(f(u) + f(v)\right)$,dimana
$\{f(uv) \in (n,\alpha,k,\beta)\} = \{1,2,3,4,2k-1,2k,2k+1,2k+2,2k+3,2k+4,\dots,2k+2n+1,2k+2n+2,(2n+2k+3),(2n+2k+6),\dots,(4n+2k+1),(4n+2k+3),(6n+2k-4),(6n+2k-2),(6n+2k+1),(6n+2k),(6n+2k+1),(6n+2k+2),(6n+2k+3)\dots(,6n+4k),(6n+4k+1),(6n+4k+2),(6n+6k-1),(6n+6k),(6n+6k+1),(6n+6k+2),(6n+6k+3)\}$ adalah himpunan berurutan. Sehingga menurut definisi 2.4.1, 2.43, dan 2.4.4 maka graph (n,α,k,β) adalah super sisi ajaib.

Contoh 3.7



Gambar : TBL(n, α, 1, β)



Gambar : TBL(3, $\uparrow, \downarrow, \downarrow$,2, $\uparrow, \uparrow$)

4. PENUTUP

A. Simpulan

Berdasarkan pembahasan maka dapat disimpulkan bahwa graph-graph dibawah ini :

1. Graph planar $P_{2n}(+)N_m$, dengan $n, m \in \mathbb{N}$
2. Graph planar $(P_2 \cup kK_1) + N_2$, dengan $k \in \mathbb{N}$
3. Graph Payung $U(m, n)$, dengan $m > 2,\ n > 1$
4. Graph kelabang $B(n)$, untuk $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$
5. Graph cumi-cumi $J(m, n)$, dengan $n, m \geq 0$, $n, m \in \mathbb{N}$
6. Graph triangular belt $TB(\propto)$, untuk $n > 1, n \in \mathbb{N}$
7. Graph triangular belt $(n, \alpha, 1, \beta)$, dengan $k = 1$ dan triangular belt (n, α, k, β) $k > 1$ merupakan super sisi ajaib.

B. Saran

Saran yang dapat disimpulkan berkaitan dengan hasil penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Kepada pembaca yang tertarik pada teori graph disarankan untuk melakukan penelitian mengenai pelabelan-pelabelan lain pada graph planar.
2. Kepada pembaca yang tertarik pada teori graph disarankan untuk melakukan penelitian mengenai pelabelan super sisi ajaib pada kelas-kelas dari graph planar yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Budayasa, Ketut. 2002.*Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Pres.

H. Enomoto, A. S. Llato, T. Nakamigawa, A. Ringel, Super edge-magic graphs, SUT J. Math. **43** (2)(1998), 105-109.

I. Cahit, Cordial graphs: a weaker version of graceful and harmonious graphs, Ars Combinatoria 23(1987), 201-207.

John. Andrian. Bondy dan U. S. R. Murty. 1967. Graph theory applications. New York: 52 Vanderbilt Avenue, New York, N.Y. 10017.

M. Seoud and A.E.I. Abdel Maqsoud, On cordial and balanced labelings of graphs, J. Egyptian Math. Society 7 (1999),127-135.

M. Seoud and A.E.I. Abdel Maqsoud and J. Sheehan, Harmonious graphs, Utilitas Mathematica **47**(1995),225-233.

M. Tsuchiya, K. Yukomura, Some families of edge-magic graphs, roceeding of the Eight International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Algorithms, Kalamazoo, Michigan, vol.2,817-822.

R.M. Figueroa-Centeno, R. Ichishima and F.A. Muntaner-Batle, The place of super edge-magic labelings among other classes of labelings, Discrete Mathematics 231 (2001), 153-168.

R.L. Graham and N.J.A.Sloane, On additive bases and harmonious graphs, SIAM J. Alg. Discrete Math. 1 (1980),382-404.

Sin-Min Lee, Alexander Nien-Tsu Lee. On Super Edge-Magic Graphs with Many Odd Sikels. San Jose State University California 95192 U.S.A.

T.Grace, On sequential labelings of graphs, Journal. Graph Theory 7 (1983), 195-201.

Z. Chen,On super edge-magic graphs, The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing **38**(2001),53-64.